

УКРУПНЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАРКОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Б. П. Зеленцов

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Новосибирск, Россия
zelentsov@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Актуальность проблемы уменьшения размерности моделей надежности систем обусловлена тем, что увеличение числа состояний вызывает естественные трудности на всех этапах реализации модели, в частности, необходимость оперирования с характеристиками большой размерности. Целью статьи является краткий обзор подходов к проблеме укрупнения состояний моделей на основе однородных марковских процессов в дискретном или непрерывном времени, а также описание двух методов укрупнения, которые могут найти применение в инженерной практике. *Материалы и методы.* Эти два метода укрупнения состояний основаны на приведении характеристик к входным состояниям подмножеств, а также определении частот переходов между состояниями и подмножествами состояний. *Результаты.* Получена зависимость между характеристиками исходной системы и укрупненной системы с меньшим числом состояний. Особенность приведенных методов заключается в том, что характеристики системы, в том числе показатели надежности, не искажаются при переходе к укрупненной модели. *Выводы.* Методы могут быть использованы в инженерной практике при моделировании надежности сложных систем в стационарном режиме на основе марковских процессов в дискретном и непрерывном времени.

Ключевые слова: укрупнение состояний, моделирование надежности, матричные модели марковских процессов в дискретном и непрерывном времени

Для цитирования: Зеленцов Б. П. Укрупнение состояний при моделировании надежности технических систем марковскими процессами // Надежность и качество сложных систем. 2021. № 2. С. 36–52. doi:10.21685/2307-4205-2021-2-4

AGGREGATION OF STATES OF MARKOV PROCESSES BY MODELING RELIABILITY OF TECHNICAL SYSTEMS

B.P. Zelentsov

Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences, Novosibirsk, Russia
zelentsov@mail.ru

Abstract. *Background.* The relevance of the problem of reducing the dimension of systems reliability models is due to the fact that an increase in the number of states causes natural difficulties at all stages of the model implementation, in particular, the need to operate with characteristics of a large dimension. The purpose of the article is a brief overview of approaches to the problem of consolidation of model states based on homogeneous Markov processes in discrete or continuous time, as well as a description of two methods of consolidation that can find application in engineering practice. *Materials and methods.* These two methods of consolidation of states are based on the reduction of characteristics to the input states of subsets and on the basis of the frequencies of transitions between states and subsets of states. *Results.* The relationship between the characteristics of the initial system and the enlarged system with a smaller number of states is obtained. The peculiarity of the given methods is that the characteristics of the system, including the reliability measures, are not distorted during the transition to the enlarged model. *Conclusions.* The methods can be used in engineering practice when modeling the reliability of complex systems in a stationary mode based on Markov processes in discrete and continuous time.

Keywords: aggregation of states, modeling reliability, matrix models of Markov processes in discrete and continuous time

For citation: Zelentsov B.P. Aggregation of states of Markov processes by modeling reliability of technical systems. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems*. 2021;2:36–52. (In Russ.). doi:10.21685/2307-4205-2021-2-4

Введение

Одной из проблем в области моделирования надежности технических систем является большое число состояний и событий, которыми описываются модели систем. Такие системы называют большими или сложными. Эти системы зачастую состоят из большого числа элементов различного назначения, в них протекают разные физические процессы, они проходят разные фазы эксплуатации, среди которых можно отметить использование по назначению, техническое обслуживание и восстановление. При эксплуатации технических систем имеют место отказы и неисправности, непрерывный и периодический контроль технического состояния, разнообразные воздействия внешней среды. Особо следует отметить превалирующий характер вероятностных закономерностей при формировании моделей сложных систем. Поэтому сложные системы обычно относят к классу вероятностных систем.

Увеличение числа состояний вызывает естественные трудности на всех этапах реализации модели: при формировании множества состояний системы и исходных характеристик системы, необходимости оперирования с характеристиками большой размерности. В аналитических моделях систем большой размерности возрастает трудоемкость получения формул, а сами формулы настолько сложны, что их применение в инженерных расчетах практически не оправдано. Зачастую большое число состояний является существенным препятствием при моделировании функционирования систем. Эти обстоятельства определяют актуальность проблемы уменьшения размерности моделей систем.

Одним из основных путей преодоления трудностей, связанных с большой размерностью сложных систем, является укрупнение состояний, при котором система с данным числом состояний заменяется системой с меньшим числом состояний. Проблема укрупнения – это проблема преобразования первоначальной системы в систему с меньшим числом состояний, изучение которой с точки зрения получения выходных характеристик не приводит к существенной потере информации и искажению результатов моделирования. В связи с этим важное значение имеет развитие известных методов укрупнения состояний, разработка новых подходов к укрупнению состояний, а также доведение математически обоснованных методов до инженерной практики.

При формировании общего подхода к укрупнению состояний следует иметь в виду, что предложения по укрупнению состояний должны быть доказательными, так как произвольное объединение нескольких состояний в одно укрупненное состояние приводит к потере информации об исходной системе.

Так, модель надежности единичного электронного блока, проходящего три фазы эксплуатации (использование по назначению, периодические проверки и восстановление) описывается 10 состояниями и 22 событиями, которые учитывают разные виды отказов, наличие непрерывного и периодического контроля технического состояния, ошибки контроля, несколько состояний с необнаруженным отказом. Совокупность таких блоков может описываться множеством из сотен и тысяч состояний.

В данной статье приведен краткий обзор подходов к проблеме укрупнения состояний и описаны два метода укрупнения состояний, которые могут найти применение в инженерной практике.

Краткий обзор подходов к проблеме укрупнения состояний

Проблема укрупнения состояний не является новой. К числу ранних работ можно отнести, например, работы [1, 2]. В работе [3] рассмотрены условия существования так называемого «нулевого приближения» по схеме укрупнения [4]. Однако оценка погрешности здесь не производится и критерий «слабых связей» не обоснован. В работе [5] предложен метод декомпозиции, в соответствии с которым система разбивается на части таким образом, что она может быть представлена в виде последовательно соединенных частей. Метод декомпозиции применим при разбиении системы на независимые части (подсистемы). Исследованы условия декомпозиции. Если же подсистемы зависимы, то метод может привести к существенной погрешности при вычислении выходных характеристик системы. Декомпозицию можно рассматривать как метод диакоптики.

Математически обоснованные достаточные условия укрупнения марковской цепи заключаются в том, что множество состояний системы разбивается на подмножества, а матрица переходных вероятностей представляется в виде соответствующей блочной (клеточной) матрицы. Если сумма элементов каждой строки блока является постоянной, т.е. не зависит от номера строки этого блока, то такое множество состояний является укрупняемым: каждое подмножество может быть заменено одним состоянием. Сумма элементов строки блока является переходной вероятностью новой, укрупненной цепи [1, 4]. Аналогичные достаточные условия сформулированы для марковского про-

цесса в непрерывном времени, где в качестве характеристики переходов между состояниями используются интенсивности переходов [5, 6]. Сформулированные достаточные условия укрупняемости марковской цепи и марковского процесса обеспечивают «склеивание» состояний каждого подмножества и позволяют сохранить точные значения предельных вероятностей состояний укрупненной системы, при этом предельная вероятность нового, укрупненного состояния получается суммированием предельных вероятностей состояний соответствующих укрупняемых состояний исходного процесса. Однако практическое применение сформулированных достаточных условий укрупнимости затрудняется тем, что эта идея не доведена до метода, пригодного для применения в инженерной практике. В частности, не исследован вопрос о совокупности сохраняемых выходных характеристик системы.

Разработаны принципы фазового укрупнения, сущность которого заключается в том, что фазовое пространство исходной системы расщепляется на конечное число непересекающихся классов. Состояния каждого класса «склеиваются» в одно состояние, а вероятности исходных состояний суммируются. В новом, укрупненном фазовом пространстве строится укрупненная система [2]. Данный подход основан на асимптотических методах. Это дает возможность получить приближенные значения выходных характеристик исходной системы. Разработан метод приведения к входным состояниям, в соответствии с которым система с данным числом состояний приводится к системе с меньшим числом состояний [7]. Исходное множество состояний разбивается на непересекающиеся подмножества, в которых выделяются входные и выходные состояния. Укрупненное множество состояний является объединением входных состояний укрупняемых подмножеств. Информация об исходном множестве состояний определенным образом «упаковывается» в систему с меньшим числом состояний с сохранением (без потери точности) некоторых выходных характеристик исходной системы. Особенность этого подхода заключается в том, что обеспечивается изоморфизм исходной и укрупненной системы, в том числе укрупненная система сохраняет свойство марковости.

Так, в рамках сложных систем исследовано поведение бактерий, совершающих случайные движения, приведены эргодические теоремы и условия эргодичности [8]. В работе [9] рассмотрена асимптотическая сходимость статистических относительных частот событий, приведены аналитические выражения, описывающие процессы полимеризации и их подтверждение путем статистического моделирования.

В работе [10] выведены формулы для среднего времени возвращения в подмножество состояний марковского процесса в дискретном и непрерывном времени. Приведены условия существования предельных вероятностей. Переход от процесса в непрерывном времени к вложенной цепи Маркова позволил упростить аналитическую модель и довести ее до развернутых формул для вероятностей состояний и доказать сходимость вероятностей состояний к предельным [11].

В работах [12, 13] рассмотрена специфическая разложимая структура, названная «почти полностью разложимая цепь». В статье представлены алгоритмы, которые приближенно вычисляют характеристики цепи Маркова в дискретном времени. Алгоритмы основаны на том, что состояния цепи Маркова сгруппированы так, что вероятности изменения состояния внутри группы имеют более высокий порядок по сравнению с вероятностями переходов между группами. Эти алгоритмы позволяют вычислять предельные вероятности состояний, время перехода между состояниями, число попаданий в состояние до поглощения. Предложен древовидный метод вычисления этих характеристик для процесса с большим числом состояний. Метод позволяет приближенно вычислять предельное распределение вероятностей состояний.

С точки зрения охвата укрупнением множества состояний укрупнение может быть простым, когда множество состояний разбивается на два подмножества, и блочным, когда множество состояний разбивается на несколько подмножеств (блоков). В работе [14] приведен частотный метод моделирования случайного процесса при разбиении эргодического множества состояний на два подмножества, при этом вычисляются частоты переходов между этими подмножествами и другие характеристики этих подмножеств. Фактически исходный процесс может быть приведен к двум укрупненным состояниям. Ключевым понятием здесь является частота переходов между двумя состояниями исходного процесса в стационарном режиме. Средняя частота переходов между подмножествами состояний также является устойчивой характеристикой эргодического марковского процесса в стационарном режиме. Такой вид простого укрупнения можно было бы назвать «частотным укрупнением» состояний марковского процесса в дискретном и непрерывном времени. Этот подход может быть использован для моделирования систем длительного использования.

При большом числе состояний разбиение исходного множества на два подмножества не всегда является эффективным, оно не учитывает особенности и различия между состояниями одного

подмножества. Матричные характеристики подмножеств при этом могут оказаться также больших размеров. Поэтому разбиение множества состояний на несколько подмножеств (блочное укрупнение) может найти применение при моделировании сложных систем.

В статье [15] представлены алгоритмы проверки возможности укрупнения цепи Маркова и получения закона формирования укрупненной цепи. Предложена оценка количества возможных пространств, получаемых в процессе укрупнения состояний исходной цепи.

В работе [16] изложен метод укрупнения состояний системы, эволюционирование которой описывается марковским процессом как в дискретном, так и в непрерывном времени. В соответствии с этим методом система с данным множеством состояний приводится к множеству с меньшим числом состояний путем введения граничных состояний подмножеств. Переходы между состояниями на исходном множестве заменены на переходы между граничными состояниями. Модель позволяет оперировать с матрицами меньших размеров. Информация об исходном множестве состояний определенным образом упакована в систему с меньшим числом состояний с сохранением средней продолжительности нахождения в подмножестве состояний.

Рассмотрена идея об укрупнении состояний по функциональному признаку, т.е. по функциям, выполняемым системой в каждом состоянии [17].

Существенным фактором при укрупнении состояний является возможность сохранения точных значений характеристик процесса. В связи с этим предложено относить укрупнение состояний к одному из двух типов: точному (эквивалентному) или приближенному (квазиэквивалентному) [18]. В этой работе исследованы условия, при которых приближенные значения вероятностей укрупненных состояний стремятся к точным значениям. К сожалению, оценка погрешности при квазиэквивалентном укрупнении не произведена.

Такие, казалось бы, естественные способы уменьшения числа состояний, как произвольное объединение нескольких состояний в одно укрупненное, произвольное объединение нескольких элементов системы в один укрупненный элемент, сокращение числа состояний за счет отбрасывания маловероятных состояний, произвольное разбиение множества состояний на подмножества могут привести к значительной погрешности выходных характеристик системы. Эти подходы зачастую не имеют математического обоснования [19].

В работе [20] рассмотрен процесс Маркова в дискретном и в непрерывном времени, множество состояний которого разбито на укрупненные состояния, к каждому из которых приписана предельная вероятность. Достаточное условие укрупнимости представлено как разновидность слабой укрупнимости, при которой вероятности исходного процесса совпадают с вероятностями укрупненного процесса при определенных начальных условиях. Исследована зависимость свойств укрупненного процесса от начальных условий процесса. Показано, что расширение процесса Маркова также зависит от начальных условий процесса. Разработанная модель применима для биохимических реакций.

Целью настоящей работы является краткое изложение двух подходов к укрупнению состояний: метод приведения к входным состояниям подмножеств и укрупнение процесса на основе частот. Информация об исходном множестве состояний определенным образом упаковывается в процесс с меньшим числом состояний с сохранением определенных выходных характеристик процесса. Такое укрупнение состояний, по терминологии [18], можно назвать эквивалентным.

Постановка задачи укрупнения

Из приведенного обзора можно выделить разные подходы к проблеме укрупнения состояний. Эти подходы различаются по следующим признакам:

- по механизму уменьшения числа состояний: «склеивание» состояний, при котором несколько состояний заменяются на одно, отбрасывание маловероятных состояний, приведение подмножества состояний к входным состояниям этого подмножества, и иные подходы, при которых n состояний заменяются на m состояний, $m < n$;
- по совокупности сохраняемых выходных характеристик системы: сохраняются все выходные характеристики системы или сохраняется определенная совокупность этих характеристик;
- по точности сохраняемых характеристик: выходные характеристики укрупненной системы сохраняют точные значения или эти характеристики сохраняются приближенно; в последнем случае укрупнение может быть с оценкой погрешности или без нее;
- по возможности применения метода укрупнения при моделировании технических, организационных и других систем.

Позиция автора заключается в том, что уменьшение числа состояний не должно приводить к потере точности выходных характеристик системы. Если же вычисляются приближенные значения этих характеристик, то это обязательно должно сопровождаться оценкой погрешности. Поэтому предложения по укрупнению состояний, даже отличающиеся очевидностью и простотой, требуют оценки погрешности. Все это усложняет математическую модель.

С точки зрения охвата укрупнением множества состояний возможны следующие виды укрупнения:

1) простое укрупнение, когда множество состояний системы разбивается на два подмножества (в данной статье рассматривается такой вид укрупнения);

2) блочное укрупнение, когда множество состояний системы разбивается на несколько подмножеств (блоков);

3) многоуровневое укрупнение, когда укрупненное множество состояний укрупняется еще один или несколько раз, при этом число состояний укрупненного множества на каждом уровне имеет тенденцию к уменьшению.

Замечание. Если укрупняется множество состояний некоторой технической системы, то разбиение на подмножества целесообразно производить по логически обоснованному функциональному признаку, который имеет инженерно-технический смысл. Таким признаком может быть вид функционирования, профилактическое обслуживание, перепрограммирование, замена оборудования, проверка технического состояния, уровень эффективности и качества функционирования системы и др. В теории надежности, например, таким признаком зачастую является безотказность системы: множество состояний системы разбивается на подмножество работоспособных и подмножество неработоспособных состояний.

Два состояния исходного множества неразличимы по функциональному признаку, если функционирование системы в одном из них не отличается от функционирования в другом с точки зрения решаемой задачи. Два состояния являются различимыми, если с точки зрения решаемой задачи функционирование системы в одном из них отличается от функционирования в другом. Другими словами, значение выходного эффекта системы при нахождении ее в двух неразличимых состояниях одно и то же, а в различимых – разное.

Два неразличимых состояния исходного множества не могут быть произвольным образом объединены в одно состояние в силу того, что они характеризуются: разными причинами попадания в них; разными причинами выхода из них; разными временами нахождения в состояниях при однократном попадании. Произвольное объединение неразличимых состояний может привести к потере существенной информации об исходной системе [9].

С точки зрения различимости состояний можно выделить два крайних случая:

1) все состояния подмножества, выделенного по некоторому признаку, различимы. Тогда укрупнение состояний по функциональному признаку невозможно;

2) все состояния подмножества, выделенного по некоторому признаку, неразличимы. Тогда все состояния этого подмножества могут быть объединены в одно состояние при соответствующем математическом обосновании.

Замечания. 1. Функциональный признак различимости состояний может быть разным для разных постановок задач и для разных показателей надежности при анализе одной и той же системы. Ввиду этого в зависимости от постановки задачи могут быть сформированы разные классы неразличимых состояний.

2. Укрупнение состояний по функциональному признаку следует использовать совместно с другими методами.

Модель системы может быть представлена в дискретном или непрерывном времени. Соответственно, случайный процесс, моделирующий функционирование системы, протекает в дискретном или непрерывном времени. Принято, что этот процесс описывается однородной марковской цепью в дискретном времени или однородным марковским процессом в непрерывном времени. Предлагаемый подход основан на оперировании с матрицами [21–23]. Исходными характеристиками системы являются матрица переходных вероятностей $P = (p_{ij})$ для процесса в дискретном времени и матрица интенсивностей $\Lambda = (\lambda_{ij})$ для процесса в непрерывном времени, где p_{ij} – вероятность перехода из i -состояния в j -состояние на одном шаге; λ_{ij} – интенсивность перехода из i -состояния в j -состояние в непрерывном времени.

Современные средства компьютерной математики позволяют оперировать с большим числом состояний. Однако составление исходных данных может быть препятствием к формированию моде-

ли. Приведенные здесь подходы к укрупнению состояний разработаны для эргодического множества состояний на основе матричных методов моделирования однородных марковских процессов. Выходные характеристики моделируемой системы определяются в стационарном режиме.

Метод приведения к входным состояниям подмножеств

Метод рассмотрен на примере простого укрупнения, когда множество состояний системы разбивается на два подмножества. Изложение и обоснование метода приведено в работе [16]. Блочное укрупнение, когда множество состояний системы разбивается на несколько подмножеств, приведено в работе [22].

Рассматривается система, множество дискретных состояний которой W является эргодическим. По некоторому качественному (или функциональному) признаку множество W разбивается на два непересекающихся несущественных подмножества состояний U и V . С течением времени имеют место переходы как внутри подмножеств U и V , так и между ними. Задача укрупнения состоит в том, что каждое из подмножеств U и V заменяется другим подмножеством с меньшим числом состояний. При этом сохраняется такой важный показатель, как средняя продолжительность нахождения в исходном подмножестве состояний.

Заметим, что в каждой конкретной задаче UV -разбиение множества состояний имеет определенный инженерно-технический смысл. С течением времени система длительного использования переходит от состояния к состоянию как в каждом из подмножеств, так и из одного подмножества в другое. Тогда функционирование системы во времени можно разбить на циклы, заключающиеся в пребывании системы в подмножестве U и в следующем за ним пребывании в подмножестве V : $U \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow \dots$

Пребывание системы в подмножестве U и следующее за ним пребывание в подмножестве V будем называть UV -циклом системы, а пребывание системы в подмножестве V и следующее за ним нахождение в подмножестве U – VU -циклом. Таким образом, время функционирования системы длительного использования разбивается на циклы, состоящие из последовательных переходов из одного подмножества состояний в другое. Рассмотрим переходы между состояниями внутри каждого подмножества и между этими подмножествами. Эти процессы описываются с помощью подматриц матрицы переходных вероятностей P для процесса в дискретном времени и подматриц матрицы интенсивностей Λ для процесса в непрерывном времени. Исходные матрицы разбиваются на четыре подматрицы в соответствии с UV -разбиением множества W :

$$P = \begin{bmatrix} P_{UU} & P_{UV} \\ P_{VU} & P_{VV} \end{bmatrix}; \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{UU} & \Lambda_{UV} \\ \Lambda_{VU} & \Lambda_{VV} \end{bmatrix}.$$

Переходы между состояниями внутри подмножеств описываются диагональными блоками матриц P и Λ : P_{UU} , P_{VV} , Λ_{UU} , Λ_{VV} , а переходы между подмножествами – блоками: P_{UV} , P_{VU} , Λ_{UV} , Λ_{VU} .

С помощью диагональных блоков матриц P и Λ можно получить характеристики продолжительности нахождения процесса в состояниях подмножеств и в самих подмножествах [4, 16, 23]. Эти характеристики приведены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики продолжительности нахождения в состояниях подмножеств и в подмножествах

Наименование	Для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. Матрица средних продолжительностей состояний подмножества U	$N_U = \ n_U(i, j)\ = (E - P_{UU})^{-1}$	$T_U = \ t_U(i, j)\ = -\Lambda_{UU}^{-1}$
2. Матрица средних продолжительностей состояний подмножества V	$N_V = \ n_V(i, j)\ = (E - P_{VV})^{-1}$	$T_V = \ t_V(i, j)\ = -\Lambda_{VV}^{-1}$
3. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве U	$n_U = \bar{r}_U N_U \dot{e}$	$t_U = \bar{r}_U T_U \dot{e}$
4. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве V	$n_V = \bar{r}_V N_V \dot{e}$	$t_V = \bar{r}_V T_V \dot{e}$

В таблице обозначено: $n_U(i, j)$ [$n_V(i, j)$] – среднее число шагов нахождения в состоянии $u_j \in U$ [$v_j \in V$] до выхода из подмножества U [V] при условии, что состояние $u_i \in U$ [$v_i \in V$] является начальным при вхождении в подмножество U [V]; $t_U(i, j)$ [$t_V(i, j)$] – среднее время нахождения в состоянии $u_j \in U$ [$v_j \in V$] до выхода из подмножества U [V] при условии, что состояние $u_i \in U$ [$v_i \in V$] является начальным при вхождении в подмножество U [V]; $\bar{r}_U$ и $\bar{r}_V$ – распределения вероятностей начальных состояний подмножеств U и V соответственно; E – единичная матрица соответствующего порядка; $\dot{e}$ – столбец, все элементы которого равны 1.

Распределения $\bar{r}_U$ и $\bar{r}_V$ являются распределениями вероятностей начальных состояний при вхождении в подмножества U и V соответственно. Они представляют собой стохастические векторы.

Переходы между подмножествами U и V удобно описывать матрицами вероятностей возвращения в подмножества U и V , A_U и A_V соответственно. Эти матрицы приведены в табл. 2 для процессов в дискретном и непрерывном времени [21].

Таблица 2

Матрицы вероятностей возвращения в подмножества состояний

Наименование	Для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. Матрица вероятностей возвращения в подмножество U	$A_U = \ a_U(i, j)\ =$ $= N_U P_{UV} N_V P_{VU}$	$A_U = \ a_U(i, j)\ =$ $= T_U \Lambda_{UV} T_V \Lambda_{VU}$
2. Матрица вероятностей возвращения в подмножество V	$A_V = \ a_V(i, j)\ =$ $= N_V P_{VU} N_U P_{UV}$	$A_V = \ a_V(i, j)\ =$ $= T_V \Lambda_{VU} T_U \Lambda_{UV}$

В таблице обозначено: $a_U(i, j)$ [$a_V(i, j)$] – вероятность того, что состояние $u_j \in U$ [$v_j \in V$] является начальным состоянием подмножества U [V] при условии, что на предыдущем цикле начальным было состояние $u_i \in U$ [$v_i \in V$].

Усечение матричных характеристик

Обозначим число состояний подмножеств U и V через m_U и m_V соответственно. Для систем с большим числом состояний эти числа могут достигать сотен и тысяч. При переходах между подмножествами состояний некоторые состояния можно исключить. Для выполнения этой операции следует ввести понятия входных и выходных состояний подмножеств [5, 7].

Состояние $u_i \in U$ является входным состоянием подмножества U , если оно может быть начальным состоянием подмножества U при переходе $V \rightarrow U$; состояние $v_i \in V$ является входным состоянием подмножества V , если оно может быть начальным состоянием подмножества V при переходе $U \rightarrow V$. Входные состояния подмножеств U и V образуют подмножества входных состояний этих подмножеств, U^+ и V^+ соответственно.

Состояние $u_j \in U$ является выходным состоянием подмножества U , если из него возможен непосредственный переход в подмножество V ; состояние $v_j \in V$ является выходным состоянием подмножества V , если из него возможен непосредственный переход в подмножество U . Выходные состояния подмножеств U и V образуют подмножества выходных состояний этих подмножеств, U^- и V^- соответственно.

Граничное состояние подмножества – это состояние, являющееся входным или выходным состоянием этого подмножества. Подмножество граничных состояний U^g образуется объединением подмножеств U^+ и U^- . Аналогично образуется подмножество V^g .

При переходах между подмножествами U и V следует учитывать только граничные состояния. А именно, при переходе $U \rightarrow V$ выход из U возможен только из состояний подмножества U^- , а вход в подмножество V – только в состояния подмножества V^+ . Аналогично при переходе $V \rightarrow U$ выход из V возможен только из состояний подмножества V^- , а вход в подмножество U – только в состояния подмножества U^+ . Таким образом, переходы $U \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow \dots$ заменяются на переходы между граничными подмножествами. Иными словами, переходы между подмножествами U и V заменяют-

ся на переходы между подмножествами U^+ , U^- , V^+ и V^- . Число состояний граничных подмножеств обозначено через m_U^+ , m_U^- , m_V^+ , m_V^- .

Итак, исходные подмножества состояний заменены на четыре подмножества, число состояний которых не превосходит число состояний подмножеств U и V .

Поскольку переходы между подмножествами U и V заменяются на переходы между граничными подмножествами, то состояния, не являющиеся граничными, можно не учитывать при переходах между подмножествами U и V . Поэтому матричные характеристики исходных подмножеств U и V можно усекать. Усечение заключается в том, что удаляются строки и столбцы состояний, которые не являются граничными. Усеченные матричные характеристики приведены в табл. 3.

Таблица 3

Усеченные матричные характеристики подмножеств состояний

Характер усечения	Усеченная матрица		Размеры усеченной матрицы
	в дискретном времени	в непрерывном времени	
1. Усечение строк, относящихся к подмножеству U	N_U^+	T_U^+	$m_U^+ \times m_U$
2. Усечение строк, относящихся к подмножеству V	N_V^+	T_V^+	$m_V^+ \times m_V$
3. Усечение строк и столбцов, относящихся к подмножеству U	N_U^r	T_U^r	$m_U^+ \times m_U^-$
4. Усечение строк и столбцов, относящихся к подмножеству V	N_V^r	T_V^r	$m_V^+ \times m_V^-$
5. Усечение строк и столбцов подматрицы переходов $U \rightarrow V$	P_{UV}^r	Λ_{UV}^r	$m_U^- \times m_V^+$
6. Усечение строк и столбцов подматрицы переходов $V \rightarrow U$	P_{VU}^r	Λ_{VU}^r	$m_V^- \times m_U^+$
7. Усеченное распределение начальных вероятностей подмножества U	$\bar{r}_U^+$		$1 \times m_U^+$
8. Усеченное распределение начальных вероятностей подмножества V	$\bar{r}_V^+$		$1 \times m_V^+$

Усеченные матрицы N_U^+ и T_U^+ имеют строки, соответствующие состояниям $u_i \in U^+$, а остальные строки удалены; все столбцы сохранены. В усеченных матрицах N_U^r и T_U^r оставлены строки, соответствующие состояниям $u_i \in U^+$, а остальные строки удалены; кроме того, оставлены столбцы, соответствующие состояниям $u_j \in U^-$, а остальные столбцы удалены. Матрицы P_{UV}^r и Λ_{UV}^r являются результатом усечения исходных матриц P_{UV} и Λ_{UV} : в них оставлены строки, соответствующие состояниям $u_j \in U^-$, а остальные строки удалены; оставлены столбцы, соответствующие состояниям $v_j \in V^+$, а остальные столбцы удалены. В распределении начальных вероятностей состояний подмножества U , $\bar{r}_U^+$ оставлены элементы, соответствующие состояниям $u_i \in U^+$, а остальные элементы удалены.

Аналогично определяются усеченные матрицы N_V^+ , T_V^+ , N_V^r , T_V^r , P_{VU}^r , Λ_{VU}^r , $\bar{r}_V^+$.

Укрупненный процесс

Итак, переходы между подмножествами U и V заменяются на переходы между граничными подмножествами, а характеристики подмножеств состояний приводятся к входным состояниям этих подмножеств. Соответствующие формулы приведены в табл. 4.

В таблице обозначено: $b_{UV}^r(i,j)$ – вероятность того, что при переходе $U \rightarrow V$ система попадет в состояние $v_j \in V^+$ при условии, что состояние $u_i \in U^+$ является начальным на UV -цикле; $a_U^r(i,j)$ – вероятность того, что состояние $u_j \in U^+$ является начальным при переходе $V \rightarrow U$ при условии, что на предыдущем цикле начальным было состояние $u_i \in U^+$.

Таблица 4

Характеристики укрупненного процесса

Наименование характеристики	Обозначение и формула		Размеры матриц
	в дискретном времени	в непрерывном времени	
1. Матрицы вероятностей попаданий между подмножествами $U \rightarrow V$	$B_{UV}^r = \ b_{UV}^r(i, j)\ =$ $= N_U^r \cdot P_{UV}^r$	$= T_U^r \cdot \Lambda_{UV}^r$	$m_U^+ \times m_V^+$
2. Матрицы вероятностей попаданий между подмножествами $V \rightarrow U$	$B_{VU}^r = \ b_{VU}^r(i, j)\ =$ $= N_V^r \cdot P_{VU}^r$	$= T_V^r \cdot \Lambda_{VU}^r$	$m_V^+ \times m_U^+$
3. Матрица вероятностей возвращения в подмножество U	$A_U^r = \ a_U^r(i, j)\ = B_{UV}^r \cdot B_{VU}^r$		$m_U^+ \times m_U^+$
4. Матрица вероятностей возвращения в подмножество V	$A_V^r = \ a_V^r(i, j)\ = B_{VU}^r \cdot B_{UV}^r$		$m_V^+ \times m_V^+$
5. Строка средней продолжительности состояний подмножества U	$\bar{n}_U = \bar{r}_U^+ \cdot N_U^+$	$\bar{t}_U = \bar{r}_U^+ \cdot T_U^+$	$1 \times m_U$
6. Строка средней продолжительности состояний подмножества V	$\bar{n}_V = \bar{r}_V^+ \cdot N_V^+$	$\bar{t}_V = \bar{r}_V^+ \cdot T_V^+$	$1 \times m_V$
7. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве U	$n_U = \bar{n}_U \cdot \dot{e}$	$t_U = \bar{t}_U \cdot \dot{e}$	
8. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве V	$n_V = \bar{n}_V \cdot \dot{e}$	$t_V = \bar{t}_V \cdot \dot{e}$	

Аналогично определяются элементы матриц $b_{VU}^r(i, j)$ и $a_V^r(i, j)$.

Переход $U^+ \rightarrow V^+$ описывается матрицей вероятностей попаданий B_{UV}^r , которая вычисляется с помощью соответствующих усеченных матричных характеристик. Размеры матрицы B_{UV}^r не превосходят размеры матрицы B_{UV} , вычисленной по исходным матричным характеристикам (см. табл. 2). Возвращение в подмножество U описывается матрицей вероятностей возвращения A_U^r , порядок которой не превосходит порядка матрицы A_U , вычисленной по исходным матричным характеристикам (см. табл. 2).

Характеристики продолжительности нахождения в состояниях вычисляются с помощью усеченных распределений начальных вероятностей подмножеств U и V , $\bar{r}_U^+$ и $\bar{r}_V^+$. Вычисление этих распределений здесь не рассматривается. Следует отметить, что эти распределения вычисляются соответственно по матрицам A_U^r и A_V^r , порядок которых не превосходит порядка матриц A_U и A_V . Алгоритм вычисления усеченных распределений $\bar{r}_U^+$ и $\bar{r}_V^+$ в переходном и стационарном режимах при функционировании систем длительного использования такой же, как и для вычисления распределений $\bar{r}_U$ и $\bar{r}_V$, рассмотренных в работах [16, 21, 23].

При нахождении распределений $\bar{r}_U^+$ и $\bar{r}_V^+$ полезно принимать во внимание следующие обстоятельства:

1. Если матрица A_U^r (A_V^r) имеет равные строки, то эти строки и являются предельным распределением $\bar{r}_U^+$ ($\bar{r}_V^+$).

2. Если $\bar{r}_U^+$ ($\bar{r}_V^+$) является предельным распределением при возвращении в подмножество U^+ (V^+), то распределение $\bar{r}_V^+ = \bar{r}_U^+ \cdot B_{UV}^r$ ($\bar{r}_U^+ = \bar{r}_V^+ \cdot B_{VU}^r$) является предельным при возвращении в подмножество V^+ (U^+).

3. Если входным состоянием подмножества U (V) является одно единственное состояние, то усечение матрицы N_U^+ и T_U^+ (N_V^+ и T_V^+) представляет собой одну строку, соответствующую этому входному состоянию. При этом матрица вероятностей возвращения состоит из одного элемента: $A_U^r = (1)$ ($A_V^r = (1)$).

При реализации алгоритма укрупнения следует выделить граничные состояния (входные и выходные) подмножеств U и V и определить соответствующие числа граничных состояний. Эту операцию можно выполнить по графу состояний с учетом переходов $U \rightarrow V$ и $V \rightarrow U$ или по исходным матрицам. Затем следует найти усеченные матричные характеристики, приведенные в табл. 3.

Изложенный метод укрупнения можно рассматривать так же, как приведение подмножеств U и V к двум эквивалентным состояниям u и v соответственно. Матричные характеристики подмножеств U и V заменяются на соответствующие усеченные матричные характеристики, и в результате выполнения операций с этими характеристиками получают среднюю продолжительность эквивалентных состояний.

Частоты переходов между состояниями исходного процесса и между состояниями подмножеств

Для процессов в дискретном и непрерывном времени вводится понятие частоты ω_{ij} непосредственных переходов между двумя состояниями исходного процесса. Для процесса в дискретном времени ω_{ij} – это среднее число непосредственных переходов $s_i \rightarrow s_j$, приходящееся на один шаг, а для процесса в непрерывном времени ω_{ij} – это среднее число переходов $s_i \rightarrow s_j$, приходящееся на единицу времени. Эти частоты удобно выразить в виде матрицы частот для исходного процесса в дискретном и непрерывном времени $\Omega = \|\omega_{ij}\|$ [14]:

$$а) \Omega = \Pi_{dg} \cdot (P - E); б) \Omega = \Pi_{dg} \cdot \Lambda, \quad (1)$$

где Π_{dg} – диагональная матрица предельных вероятностей состояний; E – единичная матрица соответствующего порядка.

Итак, соотношения (1) связывают три матричные характеристики исходного множества состояний: частоты переходов между состояниями, предельные вероятности состояний и исходные характеристики случайного процесса (переходные вероятности и интенсивности переходов).

В работе [24] введено понятие средней частоты состояния s_i , ω_i , которая одновременно является частотой входа в это состояние и частотой выхода из этого состояния.

Средняя частота ω_i связана с диагональным элементом ω_{ii} матрицы Ω простым соотношением: $\omega_i = -\omega_{ii}$.

Элементы матрицы Ω могут быть вычислены другими методами, а именно, на основе определителей или с помощью обращения матриц [8].

Из баланса частот относительно каждого состояния следуют свойства матрицы частот для процесса в дискретном и непрерывном времени:

$$а) \bar{e} \cdot \Omega = \bar{0}; б) |\Omega| = 0, \quad (2)$$

где $\bar{e}$ – строка, каждый элемент которой равен 1. Эти свойства можно использовать при различных реализациях исходного процесса, а также контроля правильности вычисления матрицы частот.

Матрица частот Ω может быть разбита на четыре подматрицы в соответствии с разбиением множества состояний W на подмножества U и V :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{UU} & \Omega_{UV} \\ \Omega_{VU} & \Omega_{VV} \end{pmatrix},$$

где Ω_{UU} , Ω_{VV} , Ω_{UV} , Ω_{VU} – подматрицы частот переходов внутри подмножеств U и V и между ними.

Представим матрицы Ω и Π_{dg} , а также исходные матрицы в виде четырех подматриц в соответствии с разбиением множества W на подмножества U и V . Произведем умножение (1) с использованием блочных матриц [5,13]. Тогда получим для процесса в дискретном времени

$$\begin{pmatrix} \Omega_{UU} & \Omega_{UV} \\ \Omega_{VU} & \Omega_{VV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{dgU} \cdot (P_{UU} - E) & \Pi_{dgU} \cdot P_{UV} \\ \Pi_{dgV} \cdot P_{VU} & \Pi_{dgV} \cdot (P_{VV} - E) \end{pmatrix} \quad (3)$$

и для процесса в непрерывном времени:

$$\begin{pmatrix} \Omega_{UU} & \Omega_{UV} \\ \Omega_{VU} & \Omega_{VV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{dgU} \cdot \Lambda_{UU} & \Pi_{dgU} \cdot \Lambda_{UV} \\ \Pi_{dgV} \cdot \Lambda_{VU} & \Pi_{dgV} \cdot \Lambda_{VV} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где Π_{dgU} и Π_{dgV} – диагональные матрицы, полученные из матрицы Π_{dg} путем удаления из нее строк и столбцов, соответствующих подмножествам V и U соответственно; E – единичная матрица согласованного порядка.

Частоты переходов между подмножествами состояний

Частоты переходов ω_{ij} ($i \neq j$) являются суммируемыми характеристиками, т.е. можно суммировать частоты любых переходов. Тогда средняя частота ω_{UV} переходов $U \rightarrow V$ между двумя подмножествами определяется суммой частот этих переходов между состояниями, т.е.

$$\omega_{UV} = \sum_{u_i} \sum_{v_j} \omega_{ij}, \quad (5)$$

где $u_i \in U$; $v_j \in V$. Аналогично находится средняя частота ω_{VU} переходов $V \rightarrow U$:

$$\omega_{VU} = \sum_{v_i} \sum_{u_j} \omega_{ij}. \quad (6)$$

Как и ранее, эти частоты имеют смысл среднего числа переходов между подмножествами состояний, приходящегося на один шаг в дискретном времени или в единицу времени в непрерывном времени.

В работах [14, 21] доказано, что $\omega_{UV} = \omega_{VU}$ для эргодического процесса.

Полученный результат легко интерпретируется: частота переходов $U \rightarrow V$ равна частоте обратных переходов, так как после каждого вхождения в подмножество U следует вхождение в подмножество V , и наоборот. Этот результат можно рассматривать так же, как частотное равновесие или частотный баланс: в стационарном режиме частота переходов из одного подмножества в другое равна частоте обратного перехода. Это положение справедливо для любого разбиения множества состояний системы на два подмножества.

Характеристики подмножеств состояний

Частота ω_{UV} является частотой цикла, представляющего собой пребывание системы в подмножестве U и следующее за ним пребывание в подмножестве V . Средняя продолжительность цикла обозначена через n_{UV} для процесса в дискретном времени и через t_{UV} для процесса в непрерывном времени:

$$n_{UV} = n_U + n_V; t_{UV} = t_U + t_V, \quad (7)$$

где n_U и n_V – средняя продолжительность нахождения в подмножествах U и V в числе шагов; t_U и t_V – средняя продолжительность нахождения в подмножествах U и V в единицах непрерывного времени.

Очевидно, что $\omega_{UV} = 1/n_{UV}$ для процесса в дискретном времени и $\omega_{UV} = 1/t_{UV}$ для процесса в непрерывном времени. Отсюда следуют зависимости между предельными вероятностями подмножеств состояний, продолжительностями нахождения в подмножествах состояний и частотой цикла (табл. 5).

Таблица 5

Соотношения между предельными вероятностями подмножеств, продолжительностями нахождения в подмножествах состояний в стационарном режиме и частотой цикла

Соотношения для процесса	
в дискретном времени	в непрерывном времени
$\pi_U = n_U \cdot \omega_{UV}$	$\pi_U = t_U \cdot \omega_{UV}$
$\pi_V = n_V \cdot \omega_{UV}$	$\pi_V = t_V \cdot \omega_{UV}$

В таблице обозначено: $\pi_U = \bar{\pi}_U \cdot \dot{e}$ и $\pi_V = \bar{\pi}_V \cdot \dot{e}$ – предельные вероятности нахождения соответственно в подмножествах U и V в стационарном режиме.

Характеристики подмножеств U и V в стационарном режиме приведены в табл. 6.

Таблица 6

Вероятностные, частотные и временные характеристики подмножеств состояний

Характеристики подмножеств	Обозначения или формулы для вычисления
1. Предельные вероятности подмножеств	$\pi_U; \pi_V$
2. Средняя частота переходов $U \rightarrow V$ или $V \rightarrow U$	$\omega_{UV} = \omega_{VU}$
3. Средняя продолжительность цикла для процесса в дискретном времени	$n_{UV} = n_U + n_V = 1 / \omega_{UV}$
4. Среднее число шагов нахождения в подмножестве U	$n_U = \pi_U \cdot n_{UV} = \pi_U / \omega_{UV}$
5. Среднее число шагов нахождения в подмножестве V	$n_V = \pi_V \cdot n_{UV} = \pi_V / \omega_{UV}$
6. Средняя продолжительность цикла для процесса в непрерывном времени	$t_{UV} = t_U + t_V = 1 / \omega_{UV}$
7. Среднее время нахождения в подмножестве U	$t_U = \pi_U \cdot t_{UV} = \pi_U / \omega_{UV}$
8. Среднее время нахождения в подмножестве V	$t_V = \pi_V \cdot t_{UV} = \pi_V / \omega_{UV}$

Показатели укрупнимости

Эффект от уменьшения числа состояний можно оценить коэффициентом укрупнимости, который представляет собой число «исчезнувших» или «упакованных» состояний при замене исходного процесса на укрупненный, приходящееся на одно укрупненное состояние:

$$L = (m - M) / M, \quad (8)$$

где m – число состояний исходного процесса; M – число состояний укрупненного процесса.

Число «исчезнувших» состояний – это разность между числом состояний исходного процесса и числом состояний укрупненного процесса. Чем больше эта разность, тем выше эффект от укрупнения. При приведении числа «исчезнувших» состояний к одному укрупненному состоянию можно использовать коэффициент укрупнимости для сравнения эффекта от укрупнения для разных вариантов укрупнения одного процесса и для сравнения эффекта от укрупнения для разных случайных процессов.

Коэффициент укрупнимости может быть применен для одного подмножества состояний:

$$L_U = \frac{m_U - m_U^+}{m_U^+}, \quad (9)$$

где m_U – число состояний подмножества U ; m_U^+ – число входных состояний подмножества U .

Коэффициент укрупнимости является удобным показателем для практического применения, поскольку он характеризует эффект укрупнения, а именно: коэффициент укрупнимости возрастает с увеличением числа «упакованных» состояний. Следует иметь в виду, что при отсутствии укрупнения коэффициент укрупнимости равен нулю.

Приведем два простых иллюстративных примера с небольшим числом состояний.

Пример укрупнения на основе однородного процесса в дискретном времени

В работе [25] исследована модель управления перегрузками при передаче информации от одного отправителя к нескольким получателям. Модель описывается пятью состояниями: 1 – стабилизация скорости, вызванная стабилизацией фрагментации буфера приема; 2 – понижение скорости передачи данных в связи с возможными проблемами в буфере приема; 3 – повышение скорости, вызванное освобождением места в буфере приемника; 4 – сброс скорости на 40 % в связи с отсутствием свободного места в буфере приема или в связи с высокой фрагментацией буфера приема; 5 – резкий сброс скорости (на 60 %) в связи с отсутствием свободного места в буфере приема или в связи с высокой фрагментацией буфера приема; состояние 5 является аварийным.

Матрица переходных вероятностей, сформированная по экспериментальным данным за 5338 шагов, имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,214 & 0,186 & 0,425 & 0,175 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,013 & 0,002 & 0,976 & 0,008 & 0,001 \\ 0,510 & 0 & 0 & 0,289 & 0,200 \\ 0,615 & 0 & 0 & 0 & 0,385 \end{pmatrix}.$$

Будем называть циклом нахождение системы в подмножестве $U = \{1, 2, 3, 4\}$ и следующее за ним нахождение в подмножестве $V = \{5\}$. Предельная вероятность аварийного состояния $\pi_5 = 0,007$. Частота аварийного состояния, или частота цикла $\omega_{UV} = \pi_5 \cdot p_{51} = 4,383 \cdot 10^{-3}$. Другие характеристики:

- средняя продолжительность цикла: $n_{UV} = 1 / \omega_{UV} = 228,172$ шагов;
- средняя продолжительность аварийного состояния после попадания в него:

$$n_V = (1 - p_{55})^{-1} = 1,625.$$

- средняя продолжительность нахождения в состояниях подмножества U :

$$n_U = n_{UV} - n_V = 226,547.$$

Таким образом, модель системы с пятью состояниями сведена к системе с двумя состояниями, что позволило вычислить среднее время между попаданиями в аварийное состояние, предельную вероятность аварийного состояния, среднюю продолжительность нахождения в состояниях 1,2,3,4.

Примечание. В работе [25] временные характеристики, связанные с аварийным состоянием, переведены в единицы времени.

Коэффициент укрупнённости данной системы $L = (5 - 2)/2 = 1,5$.

Пример укрупнения на основе однородного процесса в непрерывном времени

Простой иллюстративный пример с небольшим числом состояний приведен на основе модели функционирования линии связи в условиях недостоверного контроля технического состояния [26]. В модель заложены пять пронумерованных состояний: 1 – работоспособное состояние линии связи; 2 – неработоспособное состояние линии связи; 3 – проверка линии связи, находящейся в работоспособном состоянии; 4 – проверка линии связи, находящейся в неработоспособном состоянии; 5 – восстановление линии связи.

Процесс протекает в непрерывном времени. Особенность рассматриваемой модели заключается в том, что время нахождения в каждом состоянии отсчитывается от момента попадания в это состояние.

Матрица интенсивностей имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda - \gamma & \lambda & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ (1 - \alpha) \cdot \mu_{\pi} & 0 & -\mu_{\pi} & 0 & \alpha \cdot \mu_{\pi} \\ 0 & \beta \cdot \mu_{\pi} & 0 & -\mu_{\pi} & (1 - \beta) \cdot \mu_{\pi} \\ \mu_{\nu} & 0 & 0 & 0 & -\mu_{\nu} \end{pmatrix}.$$

В матрице обозначено: λ – интенсивность отказов линии связи; γ – интенсивность начала периодической проверки со случайным периодом; μ_{π} – интенсивность завершения периодической проверки; α – вероятность ошибки контроля I рода; β – вероятность ошибки контроля II рода; μ_{ν} – интенсивность завершения восстановления.

Граф состояний может быть легко восстановлен по приведенной матрице интенсивностей.

Пример приведен в числах, поскольку формулы являются громоздкими. Исходные данные взяты такие же, как в работе [26], а именно: средняя наработка на отказ – 10 000 ч, среднее время между проверками – 72 с, среднее время восстановления – 2 ч, средняя продолжительность одной проверки – 1 с. Исходя из этих значений приняты следующие значения интенсивностей событий, приведенных к единице измерения $ч^{-1}$:

- интенсивность отказов $\lambda = 10^{-4}$;
- интенсивность начала проверки $\gamma = 50$;
- интенсивность завершения проверки $\mu_{\pi} = 3\,600$;
- интенсивность завершения восстановления $\mu_{\nu} = 0,5$;
- вероятность ошибки контроля I рода $\alpha = 0,001$;
- вероятность ошибки контроля II рода $\beta = 0,001$.

Строка предельных вероятностей, вычисленных по формулам на основе определителя или на основе обращения матриц [23]:

$$\bar{\pi} = (0,898 \quad 1,797 \cdot 10^{-6} \quad 0,012 \quad 2,496 \cdot 10^{-8} \quad 0,09).$$

Матрица частот, вычисленная по формуле (1), имеет вид

$$\Omega = \begin{bmatrix} -44,88 & 8,976 \cdot 10^{-5} & 44,88 & 0 & 0 \\ 0 & -8,985 \cdot 10^{-5} & 0 & 8,985 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 44,835 & 0 & -44,88 & 0 & 0,045 \\ 0 & 8,985 \cdot 10^{-8} & 0 & -8,985 \cdot 10^{-5} & 8,976 \cdot 10^{-5} \\ 0,045 & 0 & 0 & 0 & -0,045 \end{bmatrix}.$$

Свойства (2) матрицы частот выполняются (в данном примере это можно проверить также и визуально).

Разбиение множества состояний по функциональному признаку на два подмножества: $U = \{1, 2, 3, 4\}$; $V = \{5\}$. В соответствии с этим матрица частот разбивается на четыре подматрицы:

$$\Omega_{UU} = \begin{bmatrix} -44,88 & 8,976 \cdot 10^{-5} & 44,88 & 0 \\ 0 & -8,985 \cdot 10^{-5} & 0 & 8,985 \cdot 10^{-5} \\ 44,835 & 0 & -44,88 & 0 \\ 0 & 8,985 \cdot 10^{-8} & 0 & -8,985 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix};$$

$$\Omega_{UV} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,045 \\ 8,976 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}; \quad \Omega_{VU} = (0,045 \quad 0 \quad 0 \quad 0); \quad \Omega_{VV} = (-0,045).$$

Частоты переходов между подмножествами U и V , вычисленные по формулам (5) и (6):

$$\omega_{UV} = -\bar{e} \cdot \Omega_{12} \cdot \dot{e} = 0,045; \quad \omega_{VU} = -\bar{e} \cdot \Omega_{21} \cdot \dot{e} = 0,045.$$

Частоты подмножеств U и V :

$$\omega_U = -\bar{e} \cdot \Omega_{11} \cdot \dot{e} = 0,045; \quad \omega_V = -\bar{e} \cdot \Omega_{22} \cdot \dot{e} = 0,045.$$

Матрица частот укрупненного множества:

$$\Omega_{\text{укр}} = \begin{bmatrix} \omega_{UU} & \omega_{UV} \\ \omega_{VU} & \omega_{VV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,045 & 0,045 \\ 0,045 & -0,045 \end{bmatrix}.$$

Видно, что свойство баланса частот справедливо как для исходного множества, так и для укрупненного множества состояний. Так, частота перехода $V \rightarrow U$, вычисленная непосредственно по предельной вероятности состояния и интенсивности перехода:

$$\omega_{VU} = \pi_5 \cdot \lambda_{51} = 0,09 \cdot 0,5 = 0,045.$$

Полученные результаты полностью согласуются с результатами модели [4], основанной на использовании теории полумарковских процессов. По этим результатам можно вычислить среднее время цикла, коэффициенты готовности и неготовности, средние времена нахождения в работоспособном и неработоспособном состояниях, приходящиеся на один цикл.

Коэффициент укрупненности, как и в предыдущем примере, $L = (5-2)/2 = 1,5$.

Заключение

Рассмотренные методы укрупнения позволяют привести систему, состояния которой разбиты на два или несколько подмножеств, к системе с меньшим числом состояний. Особенность этих методов заключается в том, что сохраняются значения определенных характеристик. Так, в методе укрупнения путем приведения к входным состояниям подмножеств сохраняются средние продолжительности нахождения в состояниях и предельные вероятности состояний, а в методе укрупнения на основе частот сохраняются средние частоты состояний и частоты переходов между состояниями как для процесса в дискретном времени, так и для процесса в непрерывном времени. На основе этих

характеристик могут быть вычислены другие характеристики системы, в том числе необходимые показатели надежности.

Полученные зависимости между характеристиками исходного и укрупненного случайного процесса можно использовать при исследовании различных процессов, моделирующих в стационарном режиме функционирования систем различного назначения (технических, экономических, организационных). В частности, по известным (заданным) характеристикам могут быть вычислены другие характеристики и параметры случайных процессов. Например, заданными могут быть переходные вероятности для процесса в дискретном времени или интенсивности переходов в непрерывном времени, частоты состояний и частоты переходов между состояниями как исходного, так и укрупненного процесса, оценки которых получены путем сбора и обработки информации о случайном процессе. Также в качестве исходных характеристик могут быть использованы продолжительности нахождения в состояниях и в подмножествах состояний, предельные вероятности состояний и подмножеств состояний и т.д.

Характеристики системы находятся путем оперирования с матрицами. При разбиении множества состояний на подмножества происходит переход к блочным матрицам, а при замене подмножеств состояний состояниями укрупненного процесса – к матрицам меньшего размера по сравнению с исходными. Эффект от укрупнения заключается в том, что уменьшаются размеры матричных характеристик, описывающих переходы между состояниями укрупненной системы. Таким образом, для нахождения характеристик, связанных с подмножеством состояний, не нужно использовать полные матрицы исходных характеристик, можно оперировать с подматрицами, относящимися к этому подмножеству. В некоторых случаях это может существенно упростить решение конкретных задач. Алгоритм укрупнения на основе оперирования с матрицами может быть реализован с помощью таких инструментов, как Mathcad или Matlab. Операции могут быть выполнены в числовом или аналитическом виде.

При моделировании систем могут быть разные цели, разные исходные данные и разные выходные характеристики. На основе полученных соотношений между параметрами исходного и укрупненного процесса могут быть найдены характеристики, описывающие функционирование моделируемой системы на укрупненном множестве состояний. Например, при исследовании надежности систем могут быть найдены коэффициент готовности, среднее время безотказной работы и другие показатели надежности системы в стационарном режиме.

Разработанные методы укрупнения могут быть использованы в инженерной практике. Материал настоящей статьи позволяет составить модель с целью исследования случайного процесса или вероятностной системы на этапе проектирования или совершенствования их эксплуатационных свойств, например, с целью улучшения их эффективности и надежности.

Использование метода приведения к входным состояниям и частотного метода позволяет уменьшить размеры матричных характеристик, т.е. позволяет укрупнить процесс.

Список литературы

1. Захаров В. К., Сарманов О. В. Укрупнение состояний цепи Маркова и стационарное изменение спектра // Докл. АН СССР. Физика, математика. 1965. Вып. 160, № 4. С. 762–764.
2. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Фазовое укрупнение сложных систем. Киев : Вища школа, 1978. 112 с.
3. Смирнов И. М. Приближенное укрупнение состояний марковской цепи со слабыми связями // Автоматика и телемеханика. 1988. Вып. 1. С. 77–83.
4. Кемени Д., Снелл Д. Конечные цепи Маркова. М. : Наука, 1970. 272 с.
5. Клемин А. И., Емельянов В. С., Морозов В. Е. Расчет надежности ядерных энергетических установок. М. : Энергоиздат, 1982. 208 с.
6. Каштанов В. А., Медведев А. И. Теория надежности сложных систем. М. : Физматлит, 2010. 608 с.
7. Зеленцов Б. П. Укрупнение состояний при расчете надежности систем // Надежность и контроль качества. 1988. № 8. С. 22–27.
8. Shalizi R. C. Methods and Techniques of Complex System: An overview. Publisher arXiv 2006. 96 p.
9. Rusconi S., Akhmatskaya E., Sokolovski D. [et al.]. Relative Frequencies of Constrained Events in Stochastic Processes: An analytic approach // Physical Review E 92. 2015.
10. Kumar A. Discrete Event Stochastic Processes. Lecture Notes for Engineering Curriculum. 2012. 166 p.
11. Salfner F. Modeling Event-driven Time Series with Generalized Hidden Semi-Markov Models. Technical Report 208, Humboldt University, 2006.
12. Gambin A., Pokarowski P. A New Combinatorial Algorithm for Large Markov Chains // Computer Algebra in Scientific Computing CASC 2001. Springer, 2001. P. 195–212.

13. Gambin A., Pokarowski P. Aggregation Algorithms for Markov Chains with Large State Space. Institute of Informatics, Institute of Applied Mathematics, Warsaw University, Poland, 2001. 49 p.
14. Зеленцов Б. П. Частотный метод моделирования вероятностных систем длительного использования // Вестник СибГУТИ. 2016. № 4. С. 25–38.
15. Захаров В. М., Эминов Б. Ф. Алгоритмы укрупнения цепей Маркова // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. 2013. № 2. С. 125–133.
16. Зеленцов Б. П. Укрупнение состояний сложных систем, моделируемых марковскими процессами // Вестник СибГУТИ. 2017. № 3. С. 43–56.
17. Зеленцов Б. П. Укрупнение состояний по функциональному признаку при расчете надежности оборудования систем коммутации // Анализ и моделирование сигналов и систем связи : сб. науч. тр. учеб. заведения связи. СПб., 1993. Вып. 157. С. 74–79.
18. Черкасов А. В. Принцип квазиэквивалентности укрупнения состояний марковских моделей // Молодой ученый. 2016. № 11. С. 529–535.
19. Ярыгин Г. А. Расчет надежности систем с большим числом состояний // Надежность и контроль качества. 1979. № 2.
20. Ganguly A., Petrov T., Koepl H. Markov Chain Aggregation and its Applications to Combinatorial Reaction Networks // arXiv: 1303.4532v2. 2013. 29 p.
21. Зеленцов Б. П. Матричные методы моделирования однородных марковских процессов. Palmarium Academic Publishing, 2017. 133 с.
22. Зеленцов Б. П. Матричные модели надежности систем. Инженерные методы расчета. Новосибирск : Наука, 1991. 112 с.
23. Зеленцов Б. П. Матричные модели функционирования оборудования систем связи // Вестник СибГУТИ. 2015. № 4. С. 62–73.
24. Зеленцов Б. П. Укрупнение состояний марковских процессов на основе частот // Вестник СибГУТИ. 2018. № 2. С. 8–21.
25. Бахарев А. В., Зеленцов Б. П., Максимов В. П., Шувалов В. П. Управление перегрузками при передаче информации от одного отправителя нескольким получателям // Вестник СибГУТИ. 2018. № 1. С. 22–32.
26. Зеленцов Б. П., Максимов В. П., Шувалов В. П. Модель функционирования линии связи в условиях недоуверенного контроля технического состояния // Вестник СибГУТИ. 2015. № 3. С. 35–43.

References

1. Zakharov V.K., Sarmanov O.V. Enlargement of the states of the Markov chain and stationary change of the spectrum. *Dokl. AN SSSR. Fizika, matematika = Reports of the USSR Academy of Sciences. Physics, Mathematics*. 1965;160(4):762–764. (In Russ.)
2. Korolyuk V.S., Turbin A.F. *Fazovoe ukрупnenie slozhnykh sistem = Phase consolidation of complex systems*. Kiev: Vishcha shkola, 1978:112.
3. Smirnov I.M. Approximate enlargement of Markov chain states with weak connections. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and telemekhanics*. 1988;(1):77–83. (In Russ.)
4. Kemeni D., Snell D. *Konechnye tsepi Markova = Finite Markov chains*. Moscow: Nauka, 1970:272. (In Russ.)
5. Klemin A.I., Emel'yanov V.S., Morozov V.E. *Raschet nadezhnosti yadernykh energeticheskikh ustanovok = Calculation of the reliability of nuclear power plants*. Moscow: Energoizdat, 1982:208. (In Russ.)
6. Kashtanov V.A., Medvedev A.I. *Teoriya nadezhnosti slozhnykh sistem = Theory of reliability of complex systems*. Moscow: Fizmatlit, 2010:608. (In Russ.)
7. Zelentsov B.P. Consolidation of states when calculating the reliability of systems. *Nadezhnost' i kontrol' kachestva = Reliability and quality control*. 1988;(8):22–27. (In Russ.)
8. Shalizi R.C. *Methods and Techniques of Complex System: An overview*. Publisher arXiv 2006:96.
9. Rusconi S., Akhmatskaya E., Sokolovski D. [et al.]. Relative Frequencies of Constrained Events in Stochastic Processes: An analytic approach. *Physical Review E* 92. 2015.
10. Kumar A. *Discrete Event Stochastic Processes. Lecture Notes for Engineering Curriculum*. 2012:166.
11. Salfner F. *Modeling Event-driven Time Series with Generalized Hidden Semi-Markov Models. Technical Report 208, Humboldt University*, 2006.
12. Gambin A., Pokarowski P. A New Combinatorial Algorithm for Large Markov Chains. *Computer Algebra in Scientific Computing CASC 2001*. Springer, 2001:195–212.
13. Gambin A., Pokarowski P. *Aggregation Algorithms for Markov Chains with Large State Space. Institute of Informatics, Institute of Applied Mathematics, Warsaw University, Poland*, 2001. 49 p.
14. Zelentsov B.P. Frequency method of modeling probabilistic systems of long-term use. *Vestnik SibGUTI = SibGUTI Bulletin*. 2016;(4):25–38. (In Russ.)
15. Zakharov V.M., Eminov B.F. Markov chain aggregation algorithms. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva = Bulletin of the Kazan State Technical University named after A.N. Tupolev*. 2013;(2):125–133. (In Russ.)

16. Zelentsov B.P. Consolidation of states of complex systems modeled by Markov processes. *Vestnik SibGUTI = SibGUTI Bulletin*. 2017;(3):43–56. (In Russ.)
17. Zelentsov B.P. Aggregation of states by functional attribute when calculating the reliability of switching systems equipment. *Analiz i modelirovanie signalov i sistem svyazi: sb. nauch. tr. ucheb. zavedeniy svyazi = Analysis and modeling of signals and communication systems: collection of scientific works of educational institutions of communication*. Saint-Petersburg, 1993;(157):74–79. (In Russ.)
18. Cherkasov A.V. The principle of quasi-equivalence of the enlargement of states of Markov models. *Molodoy uchenyy = Young scientist*. 2016;(11):529–535. (In Russ.)
19. Yarygin G.A. Calculation of reliability of systems with a large number of states. *Nadezhnost' i kontrol' kachestva = Reliability and quality control*. 1979;(2). (In Russ.)
20. Ganguly A., Petrov T., Koepl H. *Markov Chain Aggregation and its Applications to Combinatorial Reaction Networks*. arXiv: 1303.4532v2. 2013. 29 p.
21. Zelentsov B.P. *Matrichnye metody modelirovaniya odnorodnykh markovskikh protsessov = Matrix methods for modeling homogeneous Markov processes*. Palmarium Academic Publishing, 2017:133. (In Russ.)
22. Zelentsov B.P. *Matrichnye modeli nadezhnosti sistem. Inzhenernye metody rascheta = Matrix models of system reliability. Engineering calculation methods*. Novosibirsk: Nauka, 1991:112. (In Russ.)
23. Zelentsov B.P. Matrix models of the functioning of communication systems equipment. *Vestnik SibGUTI = SibGUTI Bulletin*. 2015;(4):62–73. (In Russ.)
24. Zelentsov B.P. Aggregation of states of Markov processes based on frequencies. *Vestnik SibGUTI = SibGUTI Bulletin*. 2018;(2):8–21. (In Russ.)
25. Bakharev A.V., Zelentsov B.P., Maksimov V.P., Shuvalov V.P. Congestion control when transferring information from one sender to several recipients. *Vestnik SibGUTI = SibGUTI Bulletin*. 2018;(1):22–32. (In Russ.)
26. Zelentsov B.P., Maksimov V.P., Shuvalov V.P. The model of the functioning of the communication line in the conditions of unreliable control of the technical condition. *Vestnik SibGUTI = SibGUTI Bulletin*. 2015;(3):35–43. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Борис Павлович Зеленцов

доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики,
Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики
(Россия, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86)
E-mail: zelentsov@mail.ru

Boris P. Zelentsov

Doctor of technical sciences, professor,
professor of sub-department of higher mathematics,
Siberian State University of
Telecommunications and Information Sciences
(86 Kirov street, Novosibirsk, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /

The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 10.02.2021

Поступила после рецензирования/Revised 15.03.2021

Принята к публикации/Accepted 31.03.2021